Combinatorische Optimalisatie, 2013

Week 1 20-02-2013

Hier vind je uitwerkingen van enkele opgaven uit het dictaat Grafen: Kleuren en Routeren.

Opgave 1.16 *Bewijs dat elke graaf een even aantal punten heeft van oneven graad.*
Antwoord: De som van de graden is twee maal het aantal lijnen en is dus even. Anders opgeschreven: Stel $G = (V, E)$ en noteer de graad van punt i met d_i. Dan geldt: $\sum_{i \in V} d_i = 2|E|$.

Opgave 1.19 *Bewijs dat een graaf met n punten en m lijnen een punt heeft met graad $\leq 2m/n$ en een punt met graad $\geq 2m/n$.*
Antwoord: De gemiddelde graad is $2m/n$. Dus er is ...

Opgave 1.21 *Bewijs dat elke graaf van tenminste 2 punten, 2 punten van dezelfde graad heeft*
Antwoord: Voor de graad d_i van elk punt i geldt $d_i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. Er zijn n punten en maar $n-1$ mogelijkheden dus ....

Opgave 1.26 *Voor welke m en n is $K_{m,n}$ regulier?*
Antwoord: Elk punt aan de ene zijde van de bipartite graaf heeft graad n en elk punt aan de andere zijde heeft graad m. De graaf is dus alleen regulier als $m = n$.

Opgave 1.35 *Bewijs dat de lijngraaf van een reguliere graaf ook regulier is. Als G k-regulier is, welke graad heeft $L(G)$ dan?*

Antwoord: Neem kant $ab \in E$ die knoop ab van $L(G)$ is.

Via a is ab verbonden met $k-1$ andere kanten (knopen in $L(G)$).

Via b is ab verbonden met $k-1$ andere kanten (knopen in $L(G)$).

Deze twee verzamelingen zijn disjunct. Dit geldt voor alle ab $\in E$, dus de lijngraaf is ook regulier.

Bovendien heeft ab graad $2(k-1) = 2k-2$, dus $L(G)$ is $(2k-2)$-regulier.

Opgave 1.42 *Hoeveel paden lopen er in de volledige graaf K_n van punt 1 naar punt n?*
Antwoord: Er is 1 pad van lengte 1. Er zijn $n-2$ paden van lengte 2. Er zijn $(n-2)(n-3)$ paden van lengte 3, etc. Het totaal aantal is

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(n-i-1)!}.$$

Opgave 1.44 *Bewijs dat een graaf waarin elk punt een graad tenminste k heeft, een pad heeft van lengte k. (De lengte van een pad is het aantal lijnen op het pad.)*
Antwoord: We laten zien dat als we een pad hebben van lengte $i \leq k-1$ dan kunnen we die uitbreiden. Stel v is een eindpunt van een pad van lengte $i \leq k-1$. Stel S zijn de punten op dit pad, met weglating van v. Dan geldt $|S| \leq k-1$. Punt v heeft minstens k buurpunten en heeft dus een buurpunt dat niet in S ligt. Met dit punt kan het pad uitgebreid worden.

Opgave 1.50 *Laat zien dat er voor elke n een onsamenhangende graaf bestaat op n punten en met $(n-1)(n-2)/2$ lijnen.*
Antwoord: Bijvoorbeeld een graaf die bestaat uit 1 los punt en daarnaast $n-1$ punten die allen verbonden zijn. Met andere worden, een los punt en K_{n-1}. (Dit is de enige mogelijkeheid.)

Opgave 1.52 *Bewijs dat als G onsamenhangend is, dan is $\bar{G}$ samenhangend.*

Antwoord: Omdat G onsamenhangend is bestaan V_1 en V_2 die disjunct en $V_1 \cup V_2 = V$ zodanig dat voor alle $i \in V_1$, $j \in V_2$: $(i,j) \notin E$. Al deze kanten $(i,j) \in \bar{E}$. Hieruit volgt dat $\bar{G}$ samenhangend is.

Opgave 1.64 *Bewijs dat een graaf $G = (V, E)$ tenminste $|V| - |E|$ componenten heeft.*
Antwoord: Noteer $|V| = n, |E| = m$ en laat c het aantal componenten in de graaf zijn. We bewijzen het met inductie naar het aantal lijnen m. Als $m = 0$ dan heeft de graaf n componenten: $c = n$ Anderzijds $n - m = n - 0 = n$. Het

klopt dus voor $m = 0$. Neem nu aan dat G $m \geq 1$ lijnen heeft en neem aan dat het geldt voor elke graaf op $m-1$ lijnen. Laat uit G een willekeurige lijn weg. Dan heeft deze graaf $m-1$ lijnen en c' componenten waarbij $c' \leq c+1$. (Het weglaten van een lijn verhoogt het aantal componenten met maximaal 1.) Met inductie weten we dat $c' \geq n - (m-1) \Rightarrow c \geq n - m$.

Opgave 1.65 *Bewijs dat als een graaf precies 2 punten van oneven graad heeft, dan loopt er een pad tussen deze punten.*
Antwoord: Noteer de punten met u en v. Stel er loopt *geen* pad tussen u en v. Dan zitten u en v in verschillende componenten. Deze componenten hebben dan elk 1 punt van oneven graad. In opgave 1.16 hadden we aangetoond dat dat niet mogelijk is.

Opgave 1.70 *Bewijs dat een graaf met $2n$ punten zonder driehoeken ten hoogste n^2 lijnen heeft (Turáns stelling).*
Antwoord: Een graaf met zoveel mogelijk kanten tussen elk viertal punten op $2n$ punten is een volledige bipartiete graaf. Deze graaf heeft eigensachppen:

- hij bevat geen driehoeken want twee van de die knopen moeten aan één zijde van de partitie zitten;
- tussen ieder viertal punten bestaan vier kanten;
- de graaf heeft n^2 kanten.

Opgave 1.86 *Zij G een Euler-graaf met een even aantal lijnen. Laat $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de graden van de punten zijn. Laat zien dat er een deelgraaf is met graden $d_1/2, d_2/2, \ldots, d_n/2$.*
Antwoord: Een Euler graaf heeft een Euler tour. Kleur de lijnen in de tour om en om met twee kleuren, bv 1 en 2. Laat nu alle lijnen met kleur 1 weg. De resterende deelgraaf voldoet.

Opgave 1.90 *Laat zien dat, als n oneven is, een paard op een $n \times n$ schaakboord niet met paardeprongen een rondtour over het schaakbord kan maken zodat elk vakje precies 1 maal wordt doorlopen.*
Antwoord: Een paard springt van een wit veld naar een zwart veld of omgekeerd. Als n oneven is dan is het aantal velden $n \cdot n$ ook oneven. Als je

met wit begint ben je na een oneven aantal stappen op zwart en kun je dus niet bij het beginpunt zijn.

Opgave 2.7 *Bewijs dat voor elke graaf $G = (V, E)$ geldt:*

$$\frac{1}{2}\chi(G)(\chi(G) - 1) \leq |E|.$$

Antwoord: Bekijk een kleuring met het minimale aantal ($\chi(G)$) kleuren. Bewering: Voor elk tweetal kleuren c_1, c_2 is er een lijn in de graaf met eindpunten gekleurd c_1 en c_2. Stel namelijk dat er niet zo'n lijn is.Dan kunnen we c_1 and c_2 samen nemen tot 1 kleur. en hebben we nog maar $\chi(G) - 1$ kleuren nodig. Dat kan niet want $\chi(G)$ is het minimum. Dus het aantal lijnen is tenminste gelijk aan het aantal mogelijk paren kleuren: $\binom{\chi(G)}{2}$.

Opgave 2.49 *Beargumenteer waarom het pad P in het bewijs van Stelling 2.3 niet door punt v kan gaan.*
Antwoord: Het kan er niet doorheen gaan want dan zouden beide kleuren aan v grenzen. Nu bewijzen we dat het pad ook niet kan eindigen in punt v. Bij het doorlopen van het pad vanuit u loopt de kleur $i = 1$ steeds van beneden naar boven en de kleur $j = 3$ steeds van boven naar beneden. Als het pad in v eindigt is de laatste stap van boven naar beneden en deze lijn heeft dus kleur $j = 3$. Maar we hadden juist aangenomen dat kleur j niet voorkomt in v.

Opgave 2.50 *Laat zien dat als een graaf k-lijnkleurbaar is dan zijn de lijnen zo met k kleuren te kleuren dat elke kleur ongeveer even vaak gebruikt wordt. (Dat wil zeggen: het aantal kleuren dat de ene kleur voorkomt verschilt hooguit 1 met het aantal keren dat de andere kleur voorkomt.)*
Antwoord: Beschouw een toegelaten kleuring met k kleuren. Stel wit komt w maal voor en zwart komt $z \geq w + 2$ maal voor. Bekijk de deelgraaf die gevormd wordt door de witte en zwarte lijnen. Elke component is een even cykel of een pad. Een cykel heeft evenveel zwarte als witte lijnen. Dus er is een component dat een pad is dat meer zwarte dan witte lijnen. De kleuren zwart en wit alterneren op dit pad en het begint en eindigt met zwart. Verwissel nu de kleuren zwart en wit op dit pad. Het resultaat is een toeglaten kleuring voor de graaf waarbij wit $w - 1$ maal voorkomt en zwart $z + 1$ maal. Op deze manier krijgen we uiteindelijk een kleuring waarbij voor elk paar kleuren het verschil hooguit 1 is.

N.B. Alternerende paden komen we ook tegen bij het het vinden van een grootste *matching* in een graaf (Week 2).

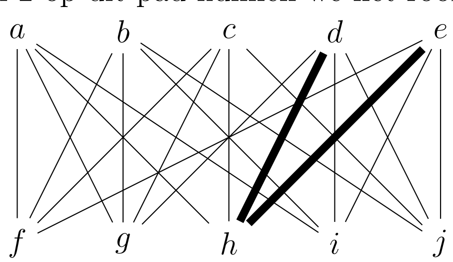
Opgave 2.51 *Bepaal een rooster voor het volgende probleem:*

x	x	x	x	
x	x		x	x
x	x	x		x
	x	x	x	x
x		x	x	x

Antwoord Vul eerst zoveel mogelijk in totdat je vastloopt.

	f	g	h	i	j
a	1	2	3	4	
b	2	3		1	4
c	3	1	4		2
d		4	1	3	?
e	4		2	?	3

We zien dat we bijvoorbeeld (d, j) niet direct kunnen invullen. Bij d ontbreekt kleur 2 en bij j ontbreekt kleur 1. Volg het pad dat bij d begint en alternerend 1,2,1,2,... gekleurd is totdat je niet verder kunt. Draai dan de kleuren om. In dit geval is het pad maar kort. Na verwisselen van de kleuren 1 en 2 op dit pad kunnen we het rooster verder invullen.



	f	g	h	i	j
a	1	2	3	4	
b	2	3		1	4
c	3	1	4		2
d		4	**2**	3	?
e	4		**1**	?	3